1	2	3	4	5	Calificación
B	B	B	B	B B B	A

Apellido y Nom.
Nro. de libreta:

Turno: MAÑANA

Álgebra Lineal - 2do. cuatrimestre 2019
Segundo parcial (03/12/2019)

1. Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ y sea $\mathcal{F} := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \chi_A = f\}$. Probar que f no tiene factores repetidos si y solo si para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{F}$ se tiene que $A \sim B$, es decir, A y B son semejantes.

2. Sea $T : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ la transformación lineal dada por

$$T(a + bX + cX^2 + dX^3) := 3a - c + d + (-a + b - 2c + 4d)\,X + (a - c + 4d)\,X^2 + (-b - 3c + 7d)\,X^3.$$

   a) Decidir si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ tal que la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   b) Calcular las coordenadas de T^{2019} en una base apropiada.

3. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal tal que $f^* = -f$. Probar que f es diagonalizable, que todos sus autovalores son números imaginarios puros ~~y que el rango de f es par~~.

4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Hallar si existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $A = UBU^*$.

5. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justificando en cada caso.

   a) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal y nilpotente. Entonces $A = 0$.

   b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $(A^2 + 2A - 8\,\mathrm{Id})(A^2 + \mathrm{Id}) = 0$. Si A tiene un único autovalor, entonces A es una matriz escalar.

   c) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida como $T(x, y, z) = (x + y + z, 3x - z, x - 2y + z)$. Entonces existe un producto interno en $\mathbb{R}^3$ para el cual T es transformación ortogonal.

Justificar todas las respuestas

Ejercicio 1. $f \in \mathbb{C}[x]$ $F = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \chi_A = f\}$. f no tiene factores repetidos sii $\forall A, B \in F$ $A \sim B$

$\Rightarrow$) Si f no tiene factores repetidos, como $\chi_A = \chi_B = f$, χ_A y χ_B tampoco. Además, ~~...~~ $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbb{C}$ cuerpo algebraicamente cerrado, entonces χ_A y χ_B tienen grado n con todas sus raíces distintas pues no tienen factores ~~repet~~ repetidos. Por lo tanto, tanto A como B son diagonalizables pues los autoespacios de cada autovalor tienen dimensión al menos 1 siempre, y en este caso es 1 por ser raíces simples de χ_A y χ_B. Además tengo n autoespacios y por lo tanto puedo armar base de ~~autovalores~~ autovectores. Tanto A como B son diagonalizables y sus autovalores son los mismos porque comparten polinomio característico $\Rightarrow \exists C_A, D_A$ tq $A = C_A D_A C_A^{-1}$ y $\exists$ C_B, D_B tq $B = C_B D_B C_B^{-1}$, tomando C_A y C_B tales que $D_A = D_B$ (lo cual puedo hacer pues a lo sumo los elementos en la diagonal de D_B son permutaciones de los de D_A)

$$C_A^{-1} A C_A = C_B^{-1} B C_B$$

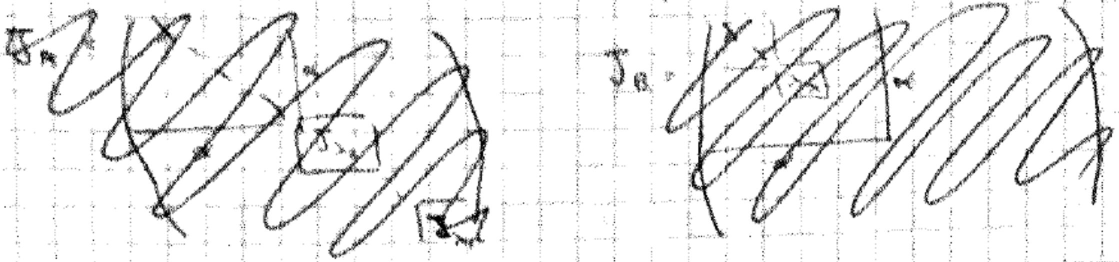
$$\Rightarrow A = \underbrace{C_A C_B^{-1}}_{C} B \underbrace{C_B C_A^{-1}}_{C^{-1}} \qquad (C = C_A C_B^{-1} \Rightarrow C^{-1} = C_B \cdot C_A^{-1})$$

$$\Rightarrow A \sim B$$

$\Leftarrow$) Si $\forall A, B$ tq $\chi_A = \chi_B = f$ $A \sim B$, significa que ~~todas~~ A y B tienen la misma forma de Jordan. Si ~~no fuera~~ f tuviera factores repetidos $\Rightarrow f = (x-\lambda)^{\alpha} q = \chi_A = \chi_B$. Sin embargo, no necesariamente $A \sim B$ pues si tomo A tq $m_A = (x-\lambda) q$ y B tq $m_B = (x-\lambda)^2 q$, el bloque de Jordan de autovalor λ de A es diagonal mientras ~~que~~

$\circledast$ $\alpha > 1$ $((x-\lambda)^{\alpha}, q) = 1$

que el bloque de Jordan de autovalor λ de B no lo es), por lo tanto, ambos bloques son distintos



Por lo tanto, las formas de Jordan de A y de B son distintas (y no semejantes) $\rightarrow A \nsim B$. Entonces, debe ser que f no tiene factores repetidos para asegurar $A \sim B$ $\forall A, B \in F$

Cabe aclarar por separado el caso $n=1$, pues en la demostración anterior asumo $n>1$ implícitamente en los polinomios característicos. Para $n=1$ es claro que f nunca tiene factores repetidos pues es de grado 1 y además si $\chi_A = \chi_B = (x-\lambda) \Rightarrow$ por Hamilton Cayley $\chi_A(A) = A - \lambda I = 0 \Rightarrow A = \lambda I$

$\chi_B(B) = B - \lambda I = 0 \Rightarrow B = \lambda I$

$A = B \Rightarrow A \sim B$

Ejercicio 2:

$T: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = 3a-c+d + (-a+b-2c+4d)x + (a-c+4d)x^2 + (-b-3c+7d)x^3$$

a) quiero ver si existe base B de $\mathbb{R}_3[x]$ tq $|T|_B = A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para eso, veo si $|T|_E \sim A$, ya que si esto ocurre, existirá un cambio de base tq ~~[illegible]~~

$$C_{BE}\,|T|_E\,C_{EB} = A$$

PARA ver si $|T|_E \sim A$, estudio sus formas de Jordan.

Es claro que la forma de Jordan de A es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & 0 \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix}$

pues si ~~[illegible]~~ B es base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^3$

~~[illegible]~~ $f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$|f_A|_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{en base } B' = \{v_2, v_1, v_3, v_4\}$$

$$|f_A|_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad A \sim \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora estudiemos si la forma de Jordan de $|T|_E$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad |T|_E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = M$$

Si $|T|_E \sim A \Rightarrow 2$ y 3 deben ser autovalores

Estudio Nu $(M-2I)$ = Nu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ = Nu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

= Nu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ~~Como la dimensión del núcleo de (M-2I) es 1~~ de

~~[illegible]~~

$$\boxed{\operatorname{Dim} \operatorname{Nu}(M-2I) = 1}$$

Veamos dim $Nu(M-2I)^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & -4 & 4 \\ -2 & -4 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$Nu\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -3 & 7 \\ -2 & -4 & -4 & 4 \\ -2 & -4 & -4 & 9 \end{pmatrix} = Nu\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= Nu\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\dim Nu(M-2I)^2 = 2}$$

$x_2 = -x_3 + 2x_4$

$-2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0 \qquad 2x_1 = -3x_2 - 3x_3 + 7x_4$

$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4$

$= -\frac{3}{2}(-x_3 + 2x_4) - \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4$

$= \frac{3}{2}x_3 - 3x_4 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 = \frac{1}{2}x_4$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{2}, 2, 0, 1)x_4$
$+ (0, -1, 1, 0)x_3$

$Nu(M-2I)^2 = \langle (1/2, 2, 0, 1), (0, -1, 1, 0) \rangle$

Veamos $Nu(M-3I)$:

$$Nu(M-3I) = Nu\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = Nu\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 8 \\ 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = Nu\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= Nu\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Nu\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = x_4$
$x_3 = x_4$

~~$Nu(M-3I) = \langle (0,1,1,1) \rangle$~~

$\boxed{\dim Nu(M-3I) = 1}$

$$Nu(M-3I)^2 = Nu \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = Nu \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= Nu \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = Nu \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= Nu \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Nu \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \dim Nu(M-3I)^2 = 2$$

Observemos que como $T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ $\chi_M = \chi_T$ es de grado 4. Además, la $\dim N(M-2I) = 1$, $\dim Nu(M-2I)^2 = 2 \Rightarrow M$ tiene un bloque de autovalor 2 $\dim Nu(M-3I) = 1 \Rightarrow M$ tiene un bloque de autovalor 3, además ninguno de estos bloques es de 1×1 pues si lo fuera, $\dim(Nu(M-2I)) = \dim(Nu(M-2I)^2) = 1$

$\dim(Nu(M-3I)) = \dim(Nu(M-3I)^2) = 1$

Entonces ambos bloques son de 2×2 (si alguno fuera de 3×3 el otro debería ser de 1×1)

Además, ninguno de los bloques es diagonal pues si alguno lo fuera $Nu(M-\lambda I) = 2$ $(\lambda = 2 \circ 3)$, entonces

$$J_M = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{array}\right) = J_A \Rightarrow \text{existe base } B \text{ tq}$$

$$|T|_B = A$$

b) Para calcular T^{2019}, elijo hacerlo en su base de Jordan, pues en esa base B_J

$$|T|_{B_J} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow |T|_{B_J}^{2019} = |T^{2019}|_{B_J} = \sum_{k=0}^{2019} \binom{2019}{k} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}^{2019-k} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}^{k}$$

$$+ \sum_{k=0}^{2019} \binom{2019}{k} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}^{2019-k} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}^{k}$$

Sumo hasta $n=1$ pues a partir de $n=2$ $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^n$ y $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^n$ son nulas.

$$= \begin{pmatrix} 2^{2019} & & & \\ 2019\cdot 2^{2018} & 2^{2019} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 3^{2019} & \\ & & 2019\cdot 3^{2018} & 3^{2019} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{2019} & 0 & 0 & 0 \\ 2019\cdot 2^{2018} & 2^{2019} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2019} & 0 \\ 0 & 0 & 2019\cdot 3^{2018} & 3^{2019} \end{pmatrix}$$

es la matriz de T^{2019} en su base de Jordan.

Ejercicio 4:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Busco una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tq $A = U B U^*$

hermitianas, pues se pide en $\mathbb{C}$, si bien se puede elegir ortogonal

En primer lugar, como A y B son simétricas, existen

(igual, está bien lo que dices si $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$)

U_A, U_B unitarias y D_A D_B diagonales tales que

$A = U_A D_A U_A^*$ $\quad B = U_B D_B U_B^*$. Si ocurriese $D_A = D_B$

$\Rightarrow \quad U_A^* A U_A = D_A = D_B = U_B^* B U_B$

$\Rightarrow \quad A = U_A U_B^* B U_B U_A^*$

Estudio los polinomios característicos de A y B

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ -1 & x-3 & 2 \\ -2 & 2 & x \end{pmatrix} = (x-3) \det \begin{pmatrix} x-3 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & x \end{pmatrix}$$

$$-2 \det \begin{pmatrix} -1 & x-3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = (x-3)\big((x-3)x - 4\big) + (-x+4) - 2\big(-2+2(x-3)\big)$$

$$= (x-3)\big(\underbrace{x^2-3x-4}_{(x-4)(x+1)}\big) - (x-4) - 4(x-4) = (x-4)\big((x-3)(x+1) - 1 - 4\big)$$

$$= (x-4)(x^2-2x-8) = (x-4)(x-4)(x+2)$$

$$\chi_B = \det \begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ 3 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-4 \end{pmatrix} = (x-4) \det \begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ 3 & x-1 \end{pmatrix} = (x-4)\big((x-1)(x-1) - 9\big)$$

$$= (x-4)(x^2-2x-8) = (x-4)(x-4)(x+2)$$

A y B tienen los mismos autovalores 4 y -2 con la misma multiplicidad cada uno. Por lo dicho antes

$$A = U_A \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix} U_A^* \qquad B = U_B \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix} U_B^*$$

Busco autovectores de A:

$$Nu(A - 4I) = Nu \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = Nu \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (2,0,1), (0,-2,1) \rangle = E_4^A$$

$$Nu(A+2I) = Nu\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = Nu\begin{pmatrix} 0 & -24 & 12 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix} = Nu\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = Nu\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \qquad x_1 + 5x_2 - 4x_2 = x_1 + x_2 = 0 \qquad x_1 = -x_2$

$-2x_2 + x_3 = 0 \qquad x_3 = 2x_2$

$Nu(A+2I) = E^A_{-2} = \langle(-1,1,2)\rangle$

Ahora normalizo bases de E^A_4, E^A_{-2}

Base de E^A_{-2} normal $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right\}$

Base de E^A_4 normal Aplico G-S

$w_1 = (2\,0\,1) \qquad \tilde{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1) \to$ normalizado

$w_2 = (0,-2,1) - \frac{\langle(0,-2,1),(2\,0\,1)\rangle}{5}(2,0,1) = (0,-2,1) - \frac{1}{5}(2,0,1) = \left(-\frac{2}{5},-2,\frac{4}{5}\right)$

$\tilde{w}_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}\left(-\frac{2}{5},-2,\frac{4}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{5},-1,\frac{2}{5}\right)$ Base de E^A_4 normal:

$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2\,0\,1), \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{5},-1,\frac{2}{5}\right)\right\}$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{U_A} \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{U_A^*}$$

Donde U es unitaria pues sus columnas son base ortonormal de $\mathbb{C}^3$.

Ahora hago lo mismo con B

$$Nu(B-4I) = Nu\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Nu\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle(-1,1,0)(0,0,1)\rangle$$

$$Nu(B+2I) = Nu\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Nu\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle(1,1,0)\rangle$$

El conjunto $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ es ortogonal pues

$\langle(-1,1,0),(0\,0\,1)\rangle = 0$

Divido por las normas para tener base O.N

$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)(0\,0\,1)\right\}$

Hago lo mismo con $\{(1,1,0)\} \rightsquigarrow \{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)\}$

$\Rightarrow \{(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)(0\,0\,1)(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)\}$ es base O.N de $\mathbb{C}^3$

$$y \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_B} \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{U_B^*}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & \frac{-\sqrt{3}}{5\sqrt{6}} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{3}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} & \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$A = U_A U_B^* B \, U_B U_A^*$

Como U_A, U_B, U_A^*, U_B^* son ortogonales, también lo es $U_A \cdot U_B^*$ pues $U_B^* = U_B^T$ (pues los entradas son reales)

U_B^T es ortogonal y como las matrices ortogonales mandan bases ortonormales en bases ortonormales, $U_A \cdot U_B^*$ es ortogonal pues sus columnas son base O.N. Además, $(U_A \cdot U_B^*)^* = U_B \, U_A^*$, entonces, llamo

$U = U_A U_B^* \Rightarrow U^* = U_B \cdot U_A^*$

y $A = U B U^*$, con

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -\sqrt{3}/5\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{3}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal y nilpotente, entonces $A=0$.

Como A es normal, por el ejercicio 10 de la práctica 8, existe una base ortonormal B tal que la t.l $f_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f_A(x) = Ax$, tiene matriz diagonal sobre esa base. Pero además, A es nilpotente, por lo tanto f_A lo es y sus únicos autovalores son el 0. Como f_A es diagonalizable y 0 es su único autovalor, la matriz de f_A en B es la matriz 0 y por lo tanto f_A es la t.l. nula. Luego, $A=0$.

(VERDADERO)

b) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(A^2+2A-8I)(A^2+I)=0$. Si A tiene un único autovalor, A es escalar.

Como $(A^2+2A-8I)(A^2+I)=0$, sea $p(x) = (x^2+2x-8)(x^2+1)$ $= (x-2)(x+4)(x-i)(x+i)$. $p(A)=0 \Rightarrow m_A \mid p(x)$.

Como todas las raíces de $p(x)$ son simples, también lo son las de m_A, ~~pues sino el grado de m_A sería mayor que el de~~ pues m_A es un divisor de $p(x)$, entonces tiene que ser un producto de algunos de sus factores mónicos.

Por otro lado, A tiene un único autovalor $\lambda \Rightarrow \chi_A(x) = (x-\lambda)^n$

Por Hamilton-Cayley $\chi_A(A)=0 \Rightarrow m_A \mid \chi_A$ y además, las raíces de χ_A son raíces de $m_A \Rightarrow m_A = (x-\lambda)^j$

y $(x-\lambda)^j \mid (x-2)(x+4)(x-i)(x+i) \Rightarrow \lambda \in \{2,4,-i,i\}$

y $j=1 \Rightarrow$ Como $m_A = (x-\lambda)$ y $m_A(A) = A-\lambda I = 0 \Rightarrow A = \lambda I$

A es escalar.

c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.l tq $T(x,y,z) = (x+y+z, 3x-z, x-2y+z)$

Quiero ver si existe pi en $\mathbb{R}^3$ tq T es ortogonal.

Si fuera cierto $\Rightarrow T^t T = T T^t = I$

$\Rightarrow \det(T^t T) = \det(I) = 1$

$\det(T^t T) = \det(T^t) . \det(T) = \det(T) . \det(T) = (\det(T))^2 = 1$

$\Rightarrow \det(T) = \pm 1$

Veamos $\det(T)$

$\det(T) = \det(|T|_E)$

$$|T|_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(3 \cdot 1 + 1) + 2(-1-3) = -4 - 8 = -12 \neq \pm 1$$

Como el determinante de T no da ni 1 ni -1, no existe pi tq T es ortogonal.

Ejercicio 3:

$f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una t.l tq $f^* = -f$. Probar que f es diagonalizable y que ~~sean~~ todos sus autovalores son números imaginarios puros.

Para ver que f es diagonalizable, veo si f es normal $\Leftrightarrow f \circ f^* = f^* \circ f$, pues si lo es, por ej 16 de la práctica 8, existe base ON de autovectores y por lo tanto es diagonalizable.

Sea $v \in \mathbb{C}^n$

$$f \circ f^*(v) \underset{f^* = -f}{=} f \circ (-f)(v) = f(-f(v)) \underset{f \text{ t.l}}{=} -f(f(v)) = -f \circ f(v)$$

$$f^* \circ f(v) = -f \circ f(v)$$

Luego, $f \circ f^* = f^* \circ f = -f \circ f \Rightarrow f$ es normal y por lo tanto diagonalizable

Además, sea λ autovalor de f y $v \neq 0$ autovector de autovalor λ.

$\langle f(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle$

$\langle f(v), v \rangle = \langle v, f^*(v) \rangle = \langle v, -f(v) \rangle = \langle v, -\lambda v \rangle$

$$\left.\begin{array}{l} \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle \\ \langle v, -\lambda v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle \end{array}\right\} \to \lambda \langle v, v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

$(v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle \neq 0)$

$\Rightarrow \lambda = -\bar{\lambda}$

(Sigue atrás)

$\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda = a+bi \quad y \quad -\overline{\lambda} = -a+bi$

$$\lambda = -\overline{\lambda} \iff \begin{matrix} a=-a \iff a=0 \\ bi = bi \end{matrix}$$

Si λ es autovalor, $Re(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda$ es imaginario puro o cero.